UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte I)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Considere una función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y defina las siguientes operaciones binarias en $\mathbb{R}$:

$$x \oplus_\psi y := x + y + 1, \quad x \odot_\psi y := \psi(x)y + \psi(x) - 1.$$

   (a) Determine las condiciones que debe satisfacer ψ para que $V = (\mathbb{R}, \oplus_\psi, \odot_\psi)$ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   (b) En el caso que V es espacio vectorial, determinar $\mathrm{GL}(V)$.
   (c) ¿Es posible construir un isomorfismo entre V y el espacio vectorial usual $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

2. Sea $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^m$ una familia de subconjuntos compactos para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1})$ y $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^m$.

   (a) Demostrar que
$$d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-n}\|f-g\|_{C(K_n)}}{1+\|f-g\|_{C(K_n)}}$$
   define una métrica sobre $C(\mathbb{R}^m)$, donde $C(\mathbb{R}^m)$ es el espacio de funciones continuas con valores reales.
   (b) Demostrar que $(C(\mathbb{R}^m), d)$ es un espacio métrico completo.
   (c) Considere el espacio de funciones continuas con soporte compacto $C_c(\mathbb{R}^m)$. ¿Es el espacio $C_c(\mathbb{R}^m)$ denso en $(C(\mathbb{R}^m), d)$?

3. Sean $r, s, t \geq 2$ números enteros y considere el grupo
$$G = \langle x, y : x^r = y^s = (yx)^t = 1 \rangle.$$
   Determine condiciones necesarias y suficientes en r, s, t para la existencia de un homomorfismo sobreyectivo $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2$.

4. Dé ejemplos de grupos G con $|\,G\,| = 2^4 \cdot 5$ tales que:

   (a) $|\,Syl_2(G)\,| = 1$ y $|\,Syl_5(G)\,| \neq 1$.
   (b) $|\,Syl_2(G)\,| \neq 1$ y $|\,Syl_5(G)\,| = 1$.

5. Recuerde que dadas dos topologías τ_1, τ_2 sobre un mismo conjunto X, decimos que τ_1 es más fina (resp. gruesa) que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$ (resp. $\tau_1 \subset \tau_2$).

   (a) Demuestre que si (X, τ) es Hausdorff, entonces (X, τ_1) es Hausdorff para toda topología τ_1 más fina que τ.
   (b) Demuestre que si (X, τ) es compacto, entonces (X, τ_1) es compacto para toda topología τ_1 más gruesa que τ.
   (c) Demuestre que si (X, τ) es compacto y Hausdorff, entonces toda topología más gruesa que τ no es Hausdorff y toda topología más fina que τ no es compacto.